Тема лекции и практики:

«ПОСТРОЕНИЕ <u>ПАРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ</u> МОДЕЛЕЙ (полиномы разных степеней, на примере 2 и 3 степени)»

Виды математических моделей (стандартных функций)

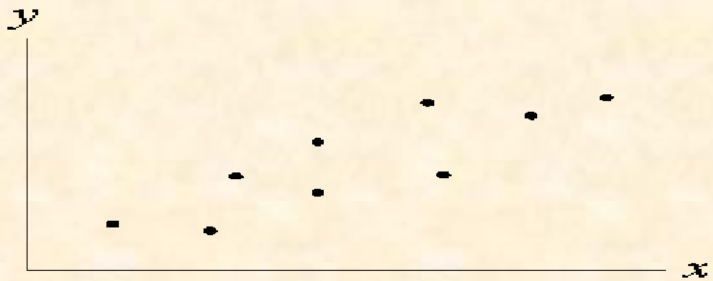
Математическая модель (стандартная функция)

ПАРНАЯ (один фактор) Y = f(X)	МНОЖЕСТВЕННАЯ (много факторов) Y=f(X1, X2, X3, ……, Xn)
Функция одной переменной	**Функция нескольких переменных**

Вид модели	Парная модель	Множественная модель
линейная	$y= ax+b$	$y= a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b$
гиперболическая	$y= a/x+b$	$y= a_1/x_1 + a_2/x_2 + \dots + a_n/x_n + b$
полином 2 степени	$y= ax^2+bx+c$	$y= a_1x_1^2 + b_1x_1 + a_2x_2^2 + b_2x_2 + c$
полином 3 степени	$y= ax^3+bx^2+cx+d$	$y= a_1x_1^3 + b_1x_1^2 + c_1x_1 + a_2x_2^3+b_2x_2^2+c_2x_2+d$
степенная	$y= ax^b$	$y= ax_1^{b1}x_2^{b2}\dots x_n^{bn}$
показательная	$y= ab^x$	$y= ab_1^{x1}b_2^{x2}\dots b_n^{xn}$
обратная	$y= 1/(ax+b)$	$y= 1/(a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n+b)$
экспоненциальная 1	$y = ae^{bx}$	$y = ae^{b1x1}e^{b2x2}\dots..$
экспоненциальная 2	$y = e^{ax+b}$	$E^{a1x1 + a2x2 + \dots. + anxn + b}$
логарифмическая	$y= aLn(x)+b$	$y= a_1Ln(x_1) + a_2Ln(x_2) + \dots. + b$

Этапы построения (поиска) стандартных парных функций

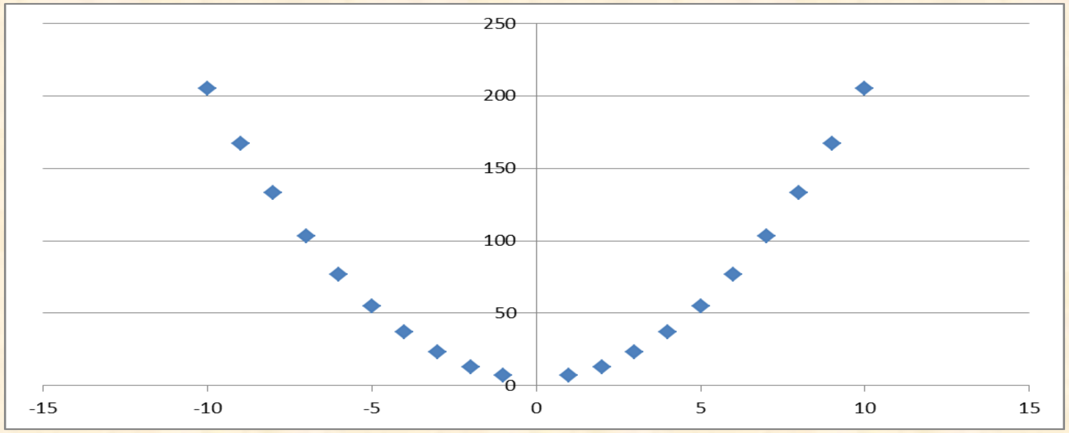
1 Этап: Определяются переменные величины Y и X
2 Этап: Формируется статистическая выборка для переменных X и Y.
3 Этап: Строится поле корреляции (зависимости).



4 Этап: Визуально по характеру распределения точек данных выдвигается гипотеза с помощью какой стандартной парной функции целесообразно аппроксимировать не строгую зависимость (гипотез может быть несколько)!!!!!!!!!
5 Этап: Записывается выбранная функция в общем виде и определяются ее параметры методом наименьших квадратов или методом центральных точек. Если выбранная функция – не стандартная, то метод нахождения ее параметров – это метод итераций.
6 Этап: Рассчитанные параметры записываются в общий вид модели.
7 Этап: Рассчитываются показатели качества модели и делается вывод о возможности ее применения для прогноза Y.

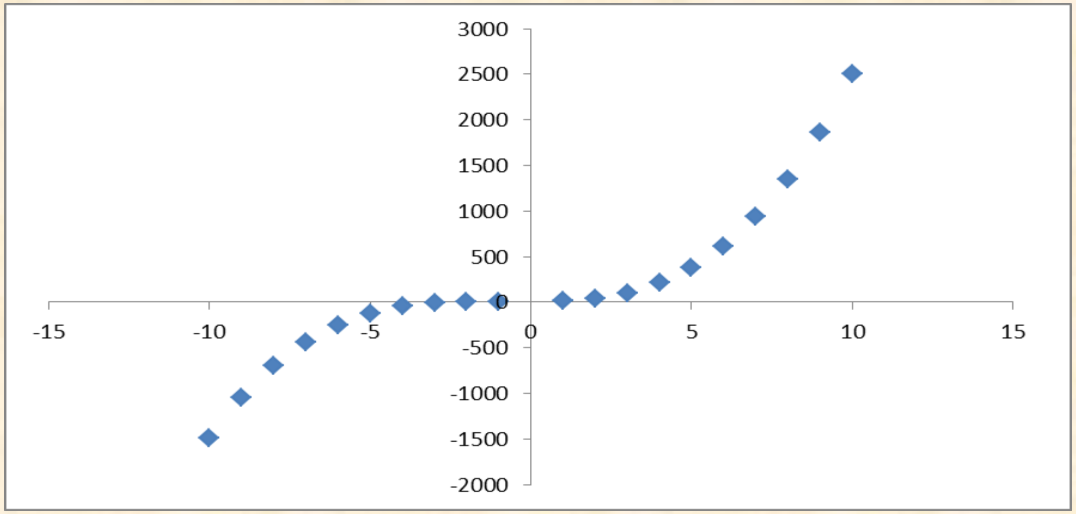
Графическая интерпретация и свойства стандартной гиперболической модели

Полином второй степени: $y = ax^2 + bx + c$



На графике прослеживается 1 максимум или 1 минимум (1 критическая точка)

Полином третьей степени: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$



На графике прослеживается 2 критические точки: минимум и максимум

Степень полинома на 1 больше, чем количество критических точек на графике

Последовательность действий в МНК (если система уравнений не известна)

1) выбор функции для аппроксимации

2) Математическая запись выражения для суммы квадратов остатков как функции от параметров модели

3) Нахождение с помощью мат. анализа критической точки данной функции:
   - нахождение частных производных;
   - приравнивание их к нулю;
   - запись полученных уравнений в систему;
   - решение системы относительно неизвестных параметров (найдена критическая точка для функции суммы квадратов остатков

4) проверка критической точки на минимум

5) если критическая точка – точка минимум, то параметры выбранной модели найдены

Построение стандартного полинома второй степени. Метод наименьших квадратов

1 Этап: Определяются переменные величины Y и X.
2 Этап: Формируется статистическая выборка для переменных X и Y (точки данных).
3 Этап: Строится **поле корреляции** (зависимости)

4 Этап: Визуально определяется характер распределения точек. Если точки стремятся к графику полиному 2 степени модели, то зависимость может быть аппроксимирована парной этой моделью.
5 Этап: Записывается модель в общем виде: **$y = ax^2 + bx + c$.** Далее необходимо определить параметры a, b, c. Сочетаний параметров – бесконечно. **Необходимо определить сочетание, при котором модель была бы максимально приближена к точкам данных, т.е. необходимо найти модель с** минимально возможными остатками.

⇨

Условие максимальной близости модели: **$S = \sum S_i^2$ - минимальна !!!!!!!**

Метод наименьших квадратов (базируется на мат. анализе)

Построение стандартной парной модели – полинома 2 степени. Метод наименьших квадратов

$$S = \sum S_i^2 = \sum(y_{\text{расчт } i} - y_{\text{фактич } i})^2 = \sum(ax^2 + bx + c - y)^2$$

S = f (a, b) – сумма квадратов остатков есть функция от параметров модели

Цель: Определить параметры a, b, c при которых S минимальна (задача из мат. анализа на определение минимума функции)

Свойство критической точки:

«Производная в критической точке равна нулю» !!!!!!

Последовательность нахождения параметров A и B (координаты критической точки):

1) определяется S': S'_a; S'_b; S'_c

2) S' = 0 (свойство критической точки): S'_a (b, c = const) = 0; S'_b (a, c = const) = 0, S'_c (a, b = const) = 0,

3) Из полученных уравнений формируется система уравнений с тремя неизвестными параметрами a, b, c (координатами критической точки)

4) Определяется: является ли критическая точка минимумом или максимумом!!!!!

5) Если критическая точка – минимум, то полученные значения и есть параметры обратной модели, которая ближе остальных расположена к точкам данных.

Построение стандартной парной модели – полинома 2 степени. Метод наименьших квадратов

Упростим условие: **<u>«Предположим, что у нас всего две точки данных»</u>**

S = $\sum \boldsymbol{S_i}^2 = \sum(\boldsymbol{y}_{\text{расчт } \boldsymbol{i}} - \boldsymbol{y}_{\text{фактич } \boldsymbol{i}})^2 = \sum(\boldsymbol{a}\boldsymbol{x_1}^2 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{y}_{\text{фактич } \mathbf{1}})^2 + (\boldsymbol{a}\boldsymbol{x_2}^2 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{y_2})$

S'$_a$ (b, c = const) = 0; S'$_b$ (a, c = const) = 0, S'$_c$ (a, b = const) = 0

$$\begin{cases} \sum Y = a\sum(X^2) + b\sum X + nc \\ \sum(YX^2) = a\sum(X^4) + b\sum(X^3) + c\sum(X^2) \\ \sum(YX) = a\sum(X^3) + b\sum(X^2) + c\sum X \end{cases}$$

Из системы находим параметры **a b c** и подставляем в модель

Построение стандартной парной обратной модели. Метод наименьших квадратов

$$\begin{cases} \sum Y = a\sum (X^2) + b\sum X + nc \\ \sum (YX^2) = a\sum (X^4) + b\sum (X^3) + c\sum (X^2) \\ \sum (YX) = a\sum (X^3) + b\sum (X^2) + c\sum X \end{cases}$$

Объединение трех условий в систему. Решение системы относительно параметров **a, b, c** позволяет определить **критическую точку** для функции **S**

Способы решения системы

в ручную

SPSS

Пакет Анализа (MExcel)

? Критическая точка – это минимум или максимум функции

Из системы находим параметры **a b c** и подставляем в модель

Построение стандартного полинома третьей степени. Метод наименьших квадратов

1 Этап: Определяются переменные величины Y и X.
2 Этап: Формируется статистическая выборка для переменных X и Y (точки данных).
3 Этап: Строится **поле корреляции** (зависимости)

4 Этап: Визуально определяется характер распределения точек. Если точки стремятся к графику полиному 3 степени модели, то зависимость может быть аппроксимирована парной этой моделью.
5 Этап: Записывается модель в общем виде: **$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.** Далее необходимо определить параметры a, b, c, d. Сочетаний параметров – бесконечно. **Необходимо определить сочетание, при котором модель была бы максимально приближена к точкам данных, т.е. необходимо найти модель с** минимально возможными остатками.

Условие максимальной близости модели: **$S = \sum S_i^2$ - минимальна !!!!!!!**

Метод наименьших квадратов (базируется на мат. анализе)

Построение стандартной парной модели – полинома 3 степени. Метод наименьших квадратов

S =
$\sum S_i^2 = \sum(y_{\text{расчт } i} - y_{\text{фактич } i})^2 = \sum(ax^3 + bx^2 + cx + d - y)^2$

S = f (a, b, c, d) – сумма квадратов остатков есть функция от параметров модели

Цель: Определить параметры a, b, c, d при которых S минимальна (задача из мат. анализа на определение минимума функции)

Свойство критической точки:

«Производная в критической точке равна нулю» !!!!!!

Последовательность нахождения параметров a, b, c, d (координаты критической точки):

1) определяется S': S'_a; S'_b; S'_c S'_d

2) S' = 0 (свойство критической точки): S'_a (b, c, d = const) = 0; S'_b (a, c, d = const) = 0,
S'_c (a, b, d = const) = 0, S'_d (a, c, b = const)

3) Из полученных уравнений формируется система уравнений с четырьмя неизвестными параметрами a, b, c, d (координатами критической точки)

4) Определяется: является ли критическая точка минимумом или максимумом!!!!!

5) Если критическая точка – минимум, то полученные значения и есть параметры обратной модели, которая ближе остальных расположена к точкам данных.

Построение стандартной парной модели – полинома 3 степени. Метод наименьших квадратов

Упростим условие: **<u>«Предположим, что у нас всего две точки данных»</u>**

S = $\sum \boldsymbol{S_i}^2 = \sum(\boldsymbol{y}_{\text{расчт } \boldsymbol{i}} - \boldsymbol{y}_{\text{фактич } \boldsymbol{i}})^2 = \sum(\boldsymbol{a}\boldsymbol{x_1}^3 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x_1}^2 + \boldsymbol{c}\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{d} - \boldsymbol{y}_{\text{фактич } 1})^2 + (\boldsymbol{a}\boldsymbol{x_2}^3 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x_2}^2 + \boldsymbol{c}\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{d} - \boldsymbol{y_2})$

S'$_a$ (b, c, d = const) = 0; S'$_b$ (a, c, d = const) = 0, S'$_c$ (a, b, d = const) = 0 S'$_d$ (a, b, c = const) = 0

$$\begin{cases} \sum yx^3 = a\sum x^6 + b\sum x^5 + c\sum x^4 + d\sum x^3 \\ \sum yx^2 = a\sum x^5 + b\sum x^4 + c\sum x^3 + d\sum x^2 \\ \sum yx = a\sum x^4 + b\sum x^3 + c\sum x^2 + d\sum x \\ \sum y = a\sum x^3 + b\sum x^2 + c\sum x + nd \end{cases}$$

Из системы находим параметры **a b c d** и подставляем в модель

Построение стандартной парной модели – полинома 3 степени. Метод наименьших квадратов

$$\begin{cases} \sum yx^3 = a\sum x^6 + b\sum x^5 + c\sum x^4 + d\sum x^3 \\ \sum yx^2 = a\sum x^5 + b\sum x^4 + c\sum x^3 + d\sum x^2 \\ \sum yx = a\sum x^4 + b\sum x^3 + c\sum x^2 + d\sum x \\ \sum y = a\sum x^3 + b\sum x^2 + c\sum x + nd \end{cases}$$

Объединение трех условий в систему. Решение системы относительно параметров **a, b, c** позволяет определить **критическую точку** для функции **S**

Способы решения системы

в ручную

SPSS

Пакет Анализа (MExcel)

? Критическая точка – это минимум или максимум функции

Из системы находим параметры **a b c d** и подставляем в модель

Вывод: таким образом, степень самой модели на 1 больше, чем количество точек минимума и максимума на графике; в итоговой системе уравнений метода наименьших квадратов получаем столько уравнений, сколько неизвестных параметров в модели.

Если на графике прослеживается 5 точек критических (пиков), то берется полином 6 степени и т.д.

Полиномы используются, если на графике наблюдаются колебания.